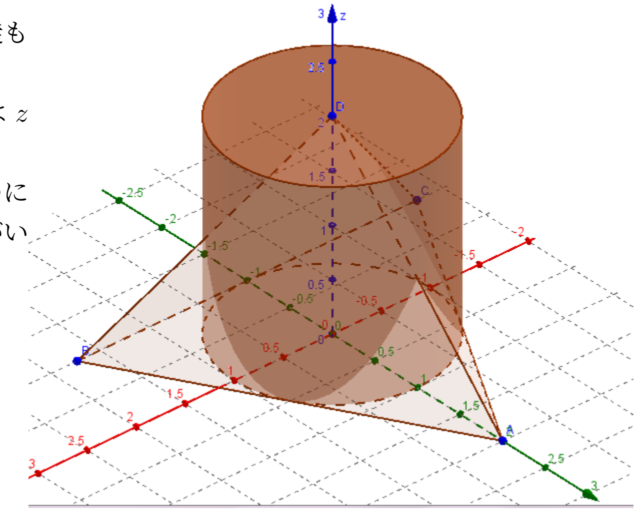
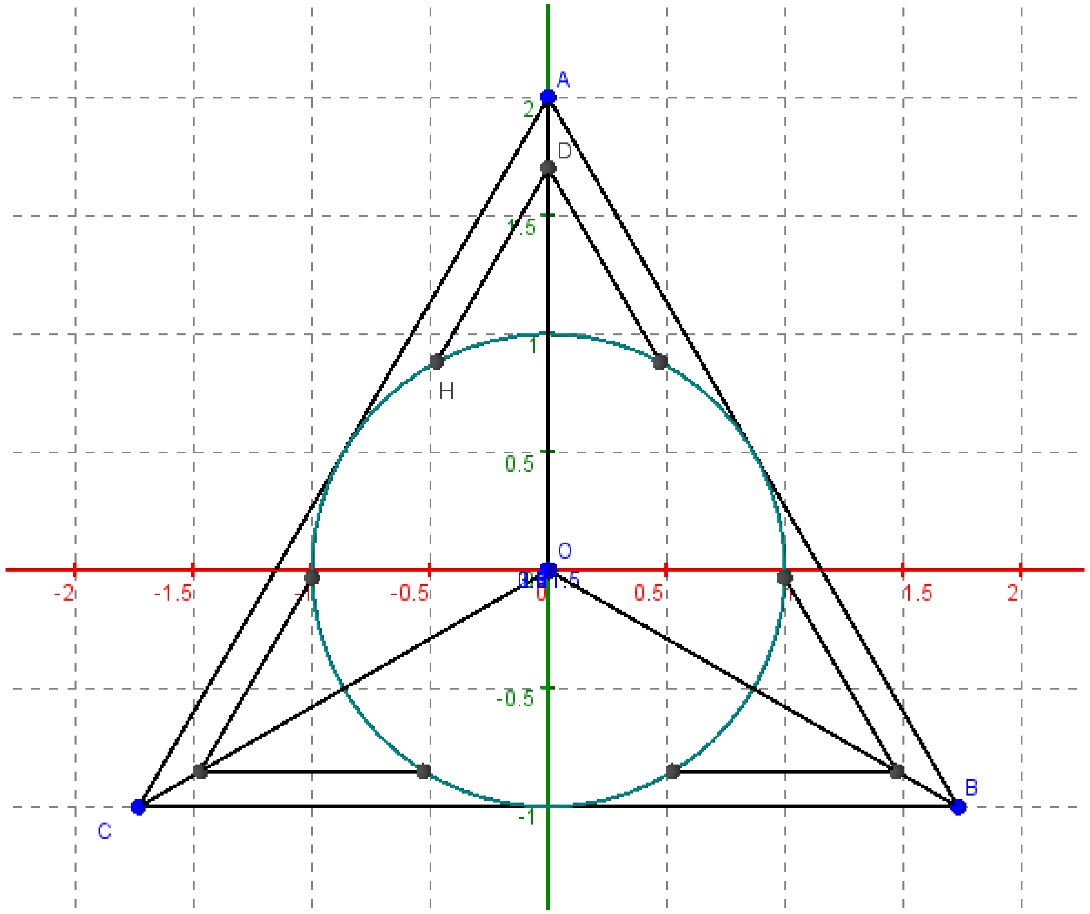
東工大の立体

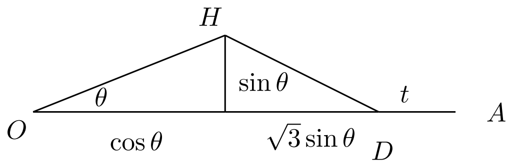
xyz 空間に 4 点 P$(0,0,2)$,A$(0,2,0)$,B$(\sqrt{3},-1,0)$,C$(-\sqrt{3},-1,0)$ をとる。
四面体 PABC の $\theta^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

12 年はどこの大学も計算力がないと完投できないタイプの問題が多かった。
これは, 昔東大で同様なものが出たと, 受験した生徒も言っていたくらいの問題。
y 軸に垂直な面で切るという手もあるが，ここでは z 軸に垂直な平面で切ってみるか。
体積を求める問題としては, 断面の面積を求めるのに断面に垂直な軸の変数とは違う変数を使ったほうがいいという難しいタイプの問題。
とにかく，問題の立体 Geogebra で見ると,





z 軸に垂直な断面で切って，$z=t$ のときの断面積を計算する。
z 座標を t として，t で断面積が表せれば楽なのだけれど，簡単に行けそうもないので変数を変える。平面図の $\angle HOD=\theta$ とおくのがひとつの方法。(平面図の上の方をよく見て下さい)
$t=2-(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$ となるので,



求める体積は $\displaystyle\int_0^1$ 断面積 $dt = 3\cdot\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}(\cos\theta\sin\theta+\sqrt{3}\sin^2\theta-\theta)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)d\theta = 4\sqrt{3}-2\pi$

この計算も計算力いるよな。

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{6\cos\theta\sin^2\theta-3\sqrt{3}\sin\theta+6\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta+6\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right\}d\theta$$

$$=\left[2\sin^3\theta+3\sqrt{3}\cos\theta-2\sqrt{3}\cos^3\theta-6\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+6\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

やっぱり，y 軸に垂直な方が簡単だったかな？
まあ今回は，変数を置き換える例として，という意味で。

余りがあるので y 軸の方もやると,
先っぽ（ y の正）の方では，断面が三角形もどきで,

$$3\left\{\sqrt{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{2-y}{\sqrt{3}}-\sqrt{1-y^2}\right)^2dy+\sqrt{3}\int_1^2\left(\frac{2-y}{\sqrt{3}}\right)^2dy\right\}$$

根本（ y の負）の方では，合同な 6 個の部分に分けて，断面が長方形（！)，これがそこらの解答に採用されているやつ。

$$6\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-\sqrt{3}y-\sqrt{1-y^2})2(y+1)dy$$