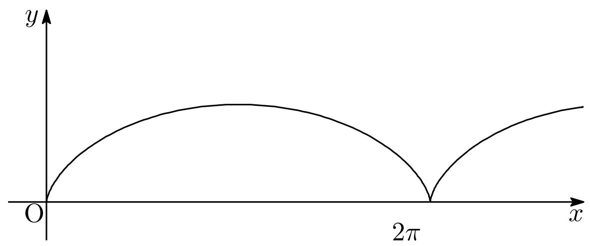
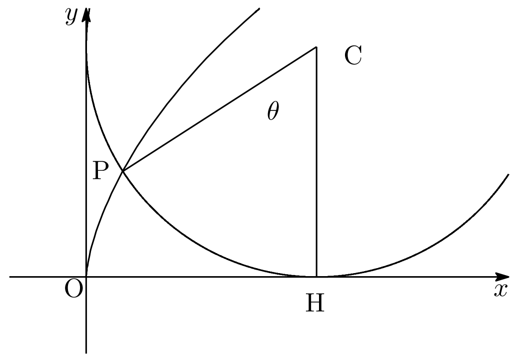
サイクロイド

教科書にあるのは，直線上の**サイクロイド：**cycloid**：擺線（はいせん）**。円がすべることなく転がるときの，その円周上の一点の軌跡。



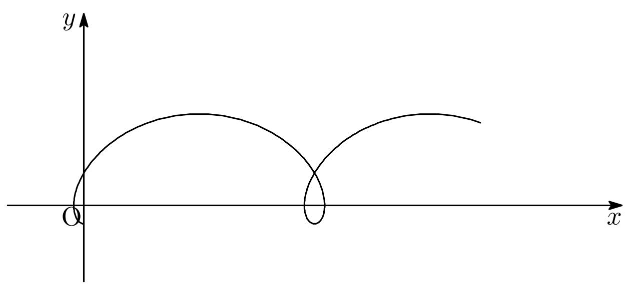
その式を求めさせて，簡単な図が添えられて， x 軸と囲まれる面積（$3\pi r^2$ 円のちょうど 3 倍か）を積分で求めたりする。話題としては最速降下曲線（だらりと下げるとカテナリー，ともに微分方程式を解くことになる）とか，等時振り子とかがある。ここらへんは，どうも，数学というより物理のような気がする。解法も物理的にベクトル利用が良さそうだ。



円の半径を r ,「すべらない」OH$=\overset{\frown}{\mathrm{PH}}$ がポイントで，中心の運動 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(r\theta, r)$ とその中心の周りの円運動 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(r\cos$ 回転角$, r\sin$ 回転角$)$ の和とするとわかりやすい。回転角が x 軸の正の向きから測って，$\dfrac{3}{2}\pi-\theta$

で，$x=r\theta+r\cos(\dfrac{3}{2}\pi-\theta)=r\theta-r\sin\theta, y=r+r\sin(\dfrac{3}{2}\pi-\theta)=r-r\cos\theta$
x を θ で微分すると y になるのが覚えやすい。
九州大学でこれの曲線の長さと体積に関する問題が出た。教科書では曲線の長さは発展範囲なので，その意味で話題となった。

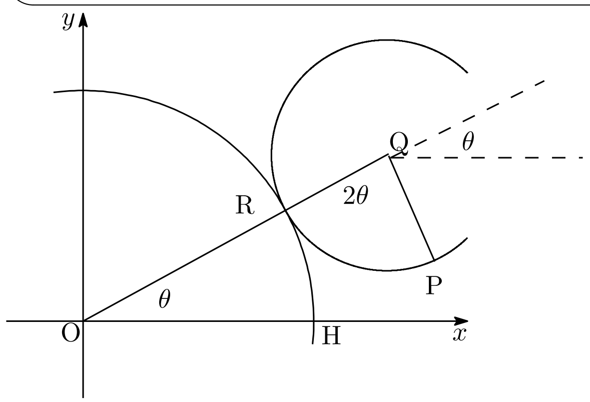
半径が色々変わると **トロコイド** となるのだが，今回はこれはパスして，
$x=r_1\theta-r_2\sin\theta, y=r_1-r_2\cos\theta$



さて，円を直線上でなくもう一つの円上に作るのが，**外サイクロイド：エピ - サイクロイド（外擺線）** と内サイクロイド**内サイクロイド：ハイポ - サイクロイド（内擺線）**。

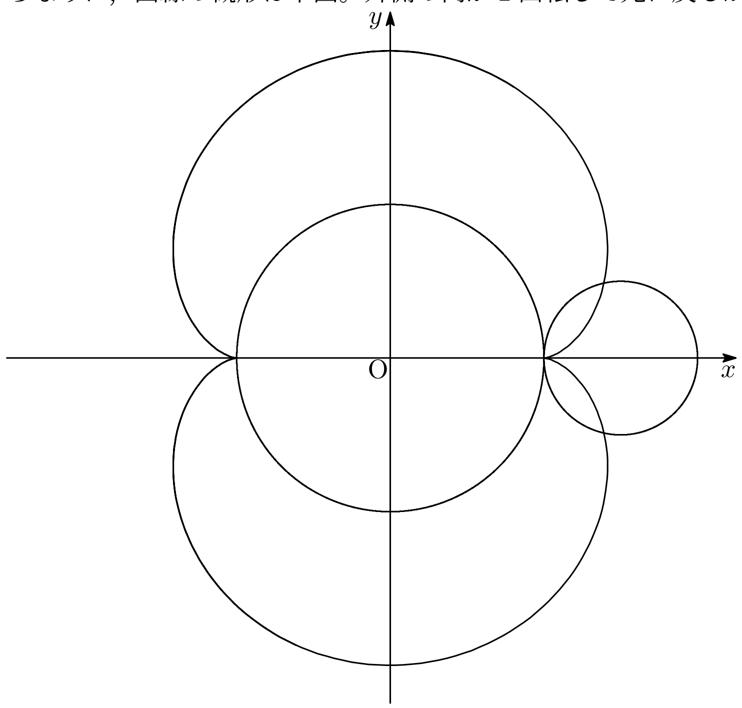
理科大で外サイクロイドが出ている。

原点 O を中心とし，半径 2 の円を D_1 とする。半径 1 の円 D_2 は最初に中心 Q が $(3, 0)$ にあり，円 D_1 に外接しながら滑ることなく反時計まわりに転がるものとする。点 P は円 D_2 の円周上に固定されていて，最初は $(2, 0)$ にある。2 つの円の接点を R としたとき，線分 OR が x 軸となす角を θ とする。点 P の座標 (x, y) を，θ を用いて表せ。



「すべらない」$\overset{\frown}{\mathrm{RH}}=\overset{\frown}{\mathrm{PR}}=2\theta$ がポイントで，中心の運動 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(3\cos\theta, 3\sin\theta)$ と その中心の周りの円運動 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\cos$ 回転角$, \sin$ 回転角$)$ の和として，回転角が x 軸の正の向きから測って $\pi+3\theta$

で，$x=3\cos\theta+\cos(\pi+3\theta)=3\cos\theta-\cos 3\theta, y=3\sin\theta+\sin(\pi+3\theta)=3\sin\theta-\sin 3\theta$
ちなみに，曲線の概形は下図。外側の円が 2 回転して元に戻るから大体の形は予想がつく。



そして，早稲田で内サイクロイド。

xy-平面上の円 $C: x^2+y^2=1$ の内側を半径 $\frac{1}{2}$ の円 D が C に接しながらすべらずに転がる。時刻 t において D は点 $(\cos t, \sin t)$ で C に接しているとする。D の周上の点 P の軌跡について考える。ある時刻 t_0 において点 P が $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ にあり，D の中心が第 2 象限にあるとする。以下の問に答えよ。

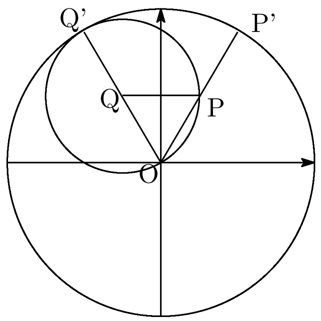
(1) 時刻 t_0 における D の中心の座標を求めよ。

(2) 第 1 象限において，点 P が C 上にあるときの P の座標を求めよ。

(3) 点 P の軌跡を xy-平面上に図示せよ。

(1) OP=OQ=PQ, 動径 OP は $\frac{\pi}{3}$

よって，求める座標は $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$



(2) $\overset{\frown}{\text{Q'P}} = \frac{\pi}{3} = \overset{\frown}{\text{Q'P'}}$

よって，求める座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) 内側の円が 2 回転してもとに戻るから，意外にも直線になりそう，(1)(2) から予想は

線分 $y=\sqrt{3}x \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$

中心の運動 $\overrightarrow{\text{OQ}} = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$ と その中心の周りの円運動 $\overrightarrow{\text{QP}} = (\frac{1}{2}\cos \text{回転角}, \frac{1}{2}\sin \text{回転角})$ の和として，回転角が x 軸の正の向きから測って，$t-2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi - t$

$$x=\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)=\frac{1}{2}\left\{\cos t+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)\right\}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)=\frac{1}{2}\left\{\sin t+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)\right\}=\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，確かに $y=\sqrt{3}x \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$

内外サイクロイドの話題としては，時計の歯車に使われているそうだ。

ここからは，Maxima の話。

Maxima でこのアニメを作った。アニメを途中で止めた図。

右上から，外サイクロイド，内サイクロイド（内側の円の半径が外側の $\frac{1}{2}$），内サイクロイド（内側の円の半径が外側の $\frac{1}{3}$）