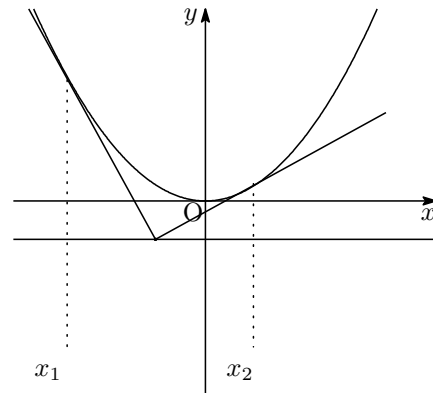


楕円の準円 (director circle) と楕円の極線 (polar)

楕円花盛り。楕円の式は円ほど簡単でないのにしる計算が厄介になる。

その1 いままでその代表的なものが、曲線外から2本の直交する接線を引くという問題。

放物線ならその曲線外の点は放物線の準線上にある。この問題で、すべての言葉を説明しておこう。



放物線 $x^2 = 4py$ の外から2本の直交する接線を引く。

放物線外の点を (s, t) とする。接線が座標軸に平行でないことを断っておいて、接線を $y = m(x-s) + t$ とおく。

方法その1 (代数的) 放物線の式と連立して接するから判別式を0とする。

$x^2 - 4pmx + 4pms - 4pt = 0$ の判別式を D とすると

$D/4 = 4(p^2m^2 - psm + pt) = 0$ これの解を m_1, m_2 とおくと $m_1 \cdot m_2 = -1$ となればいい。

解と係数の関係から $\frac{pt}{p^2} = -1$ よって $t = -p$ つまり $y = -p$ これ準線 (directrix) でしょ。

方法その2 (解析的) 接点の座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とおくと

接線は $x_1x = 2p(y+y_1), x_2x = 2p(y+y_2)$ 両方とも (s, t) を通るので $x_1s = 2p(t+y_1), x_2s = 2p(t+y_2)$ ということは、ふたつの接点は直線 $xs = 2p(t+y)$ を通るということという論理はここ以外ではあまり見ない。

2つの接点を通る直線を極線 (polar) という。点 (s, t) は極という。

極線 $xs = 2p(t+y)$ と放物線 $x^2 = 4py$ の交点の x 座標が x_1, x_2 だから、これも解と係数の関係により $\frac{x_1 + x_2}{2} = s$ つまり、極の x 座標は2接点の中点の x 座標と同じことがわかる。

方法その3 (幾何的) 円なら何か幾何的にやれそうだが放物線はちよつとなあ。円ではいろいろなことが成り立つが、楕円になるとゆがむ距離も角度もゆがむ、しかし、ゆがんでも成り立つのが (射影幾何学的にいうと) 中点とかの関係だ。

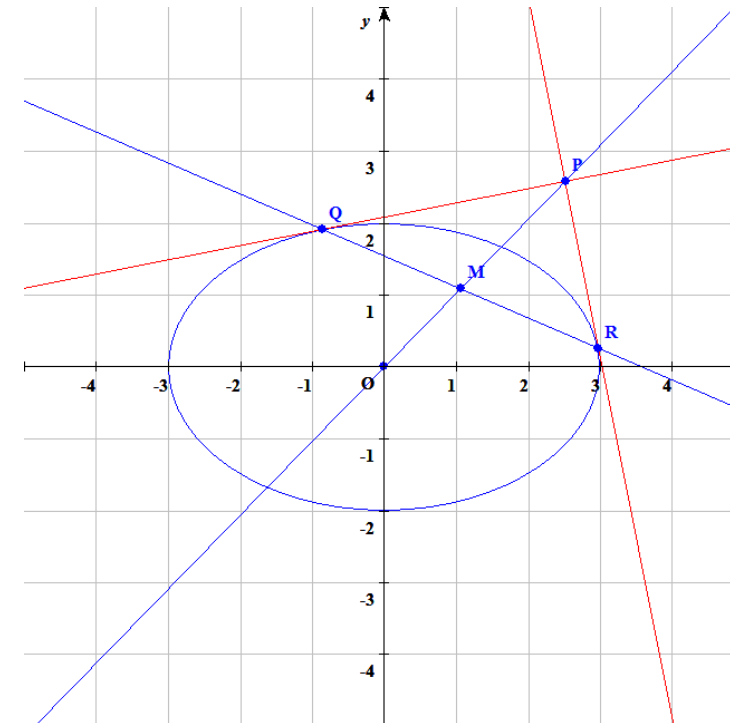
2接点の中点は原点と極を結ぶ直線状にある。... *

楕円でもその点から引いた接線が直交する点の軌跡が求まり、軌跡が円になるのでそれを準円 (director circle) という。

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と $y = m(x-s) + t$ を連立して、判別式をとって解と係数の関係を使って同様に計算する (凄い計算です、あつてるとおもいます、Maxima でやっちゃいましたので)。

$s^2 + t^2 = a^2 + b^2$ つまり、中心原点・半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円。なるほどなあ、と思うでしょ。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の準円は $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$



このページの以下は、Maxima とファンクションビューに興味ない人は無視してください。

ついでに、この図はファンクションビューと Maxima を駆使して描かせてます。

楕円の式と極線の式を Maxima で連立させた解をファンクションビューに入れて接点を描かせます。Px を極点 P の x 座標、Py を極点 P の y 座標として、

```
solve([x^2/a^2+y^2/b^2=1,Px*x/a^2+Py*y/b^2=1],[x,y])\$
```

```
Mx1:%o1[1][1]$Mx2:%o1[2][1]$My1:%o1[1][2]$My2:%o1[2][2]\$
```

```
((My1+My2)/2)/((Mx1+Mx2)/2)\$
```

```
y/x=Py/Px
```

楕円と極線の交点 (接点) をだして

その中点の座標をだして

原点と極線を通る直線をチェックしてます。

まあ、手計算ではやりたくはない。というか、私の手計算ではおぼつかない。

次の問題はその1のタイプ。計算がややこしいだけ。

順天堂医

t は $0 < t < 1$ をみたす定数とする。 x, y 平面上に長さが1の線分 PQ がある。点 P は x 軸上を動き、点 Q は y 軸上を動くとき、線分 PQ を $t:1-t$ に内分する点の軌跡を C とする。

(1) 曲線 C の方程式を t 用いて表せ。答 $\left(\frac{x}{1-t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 = 1$

(2) 中略

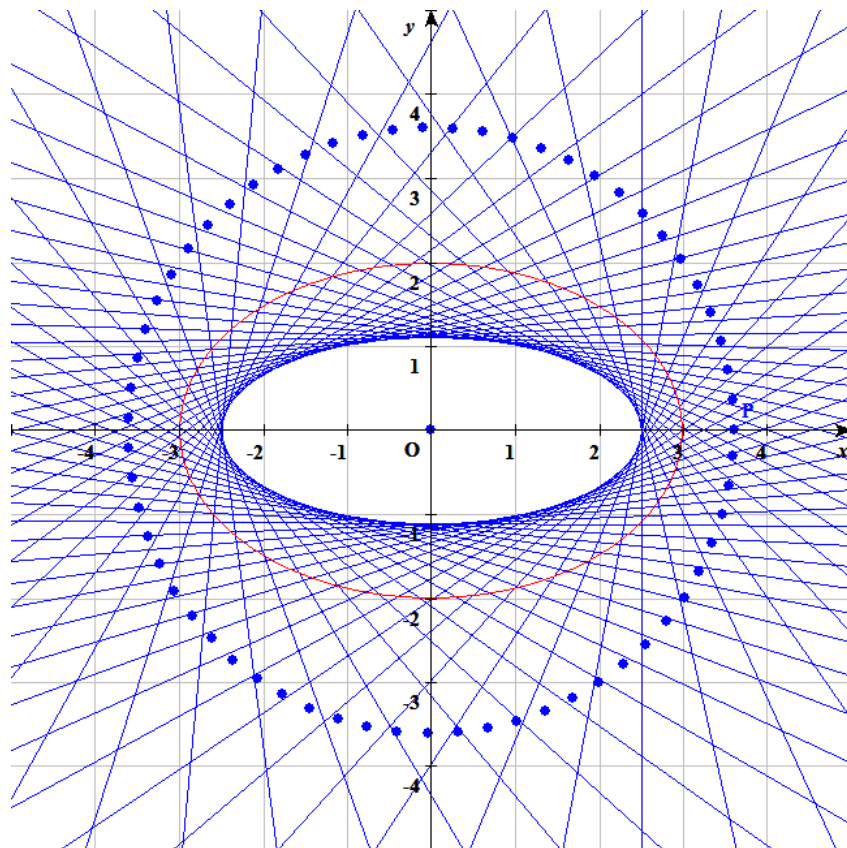
点 A $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ から C にひいた2本の接線が直交するような t の値を求めよ。答 $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

これなんか、 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ が準円 $x^2 + y^2 = t^2 + (1-t)^2$ の上にあればいいので、代入して $\frac{7}{9} = t^2(1-t)^2$ これを解いて $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ なんてね。記述式だと点数もらえないだろうな。答のチェックにどうぞ。

次の図は赤いのが楕円 $a=3, b=2$ 外側の点の円が準円 $x^2 + y^2 = 13$ 。

内側の楕円は極線が包絡線となっている。こんな問題はどこかで出そうですね。

「楕円外の点から引いた2接線が直交するときの接点を結ぶ直線（極線）の存在領域を求めよ。」なんてね。うーん、計算しやすいように数字だけ工夫すれば、結構いい問題じゃないか。著作権を主張しておこう、2011年2月野の石。Maxima にやらせてみると、 $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \geq \frac{1}{a^2 + b^2}$ なんてのが出てくる、またしても見事な式が発見できた！。



その2 もうひとつのテーマ、で、今年2つの大学で出たのは、次のような極線に関する問題だ。

立命

$a > 0$ とする。座標平面において、点 P(1,3) から楕円 $ax^2 + \frac{y^2}{2a} = 1$ に引いた2本の接線の接点を Q, R とする。

Q, R はともに、ある直線の上にある、その直線の式を求めよ。

線分 QR の中点を M として、M の座標を求めよ。M はある直線上にある、その直線の式を求めよ。

後略

QR が極線。 $ax + \frac{3y}{2a} = 1$ これと楕円の式を連立して y を消去し、その解を x_1, x_2 とし、解と係数の関係から $\frac{x_1 + x_2}{2}$ を出せばいい。

$M\left(\frac{2a}{2a^2 + 9}, \frac{6a}{2a^2 + 9}\right)$ から、M が通る直線を、 $y = 3x$ と出すのだが。上の考察*によって、この直線は、原点と極 (1,3) を通る直線 $y = 3x$ でしょう、というわけ。

$y = 3x$ が先にわかるとすれば、答だけ出すなら、極線との交点を求めれば M の座標がでる。相当楽になりますね。穴埋めですから。

傾いた楕円でもいいというのが、次の問題。

慈恵医科

楕円 $C: 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 4$ と $x + y = 0$ に平行な直線とが2つの交点を持つときその中点はある直線上にある。その直線を求めよ。

後略

これも、まず、 $x + y = k$ と C を連立して x の方程式にして、解と係数の関係で中点の座標を求める、というもの。

これもズルしてみると、極 (s, t) の極線は $7sx - 3(sy + xt) + 12ty = 4$ これが $x + y = 0$ に平行だから $7s - 3t : -3s + 12t = 1 : 1$ より $3t = 2s$ 原点とこれを通る直線は $3y = 2x$

$x - \frac{3}{2}y = 0$ あっというまの答ですな。これも穴埋めでしたから、超お得。慈恵医大の問題は他の問題も計算量が半端ではなくバンバンこんなことをやって合格してください、という感じかな。

この問題、後半はなんと、この極線に平行な原点を通る直線と、原点と極を通る直線で座標変換して楕円の面積を求めるといったっていい問題。続きをやることをお勧めしますが、今回のテーマはここまでということ。