信大の行列の問題の元

教育前期　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は零行列ではなく，A^2 が零行列となるとする。次の問に答えよ。
(1) $a+d=ad-bc=0$ を示せ。
(2) 行列 A が表す一次変換によって，座標平面上の原点と任意の点 P,Q は同一直線上に移ることを示せ。

理学部後期　s,t を定数とする。点 $\mathrm{P}(1,s)$ を，行列 $A=\begin{pmatrix} t-2s & 1 \\ -s^2 & t \end{pmatrix}$ で移した点の座標を求めよ。
また，点 P を，行列 A^5 で移した点の座標を求めよ。

医学部前期　座標平面に，一直線上にない 3 点 $\mathrm{O}(0,0)$,$\mathrm{P}(a,b)$,$\mathrm{Q}(c,d)$ がある。
点 P,Q は，行列 $\begin{pmatrix} 1 & m-1 \\ m & 1 \end{pmatrix}$ によってそれぞれ点 P',Q' に移され，
3 点 O,P',Q' も一直線上にないとする。
(1) △ OPQ の面積 S が $S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$ で与えられることを証明せよ。
(2) △ OP'Q' の面積が △ OPQ の面積より大きくなるような定数 m の範囲を求めよ。

医学部後期　行列 A を次のように定める。
$A=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 37 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$
また，直線 $l: y=\dfrac{1}{2}x$ 上にない点 $\mathrm{P}(a,b)$ を，行列 A^n で移した点を P_n とする。
点 P_n と直線 l との距離 d_n を，a,b,n の式で表せ。ただし，n は自然数とする。

すべて，計算で示す計算量もほどほどのいい問題ですが，答だけなら固有値の知識から以下のように明らかです。**行列の分類**参照。

教育　$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E=O$ （$b=c=0$ とすると $a=d=0$ となり A が零行列になって矛盾）より $a+d=0, ad-bc=0$
固有値 0（重複度 2）なので全平面を一直線（$ax+by=0$）につぶし，2 回やるとその直線が原点につぶれる変換。

理学部後期　別に計算すればいいんだけど，固有値は $t-s$ 重複度 2 で，固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ だから $A(1,s)=(t-s)\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}, A^5(1,s)=(t-s)^5\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$

医学部前期　これも (1) から (2) へと計算でこれを示す問題だが，1 辺 1 の正方形を面積が行列式倍の平行四辺形に移すのだから，$|1-m(m-1)|>1$ を解けばよい。で，$m<-1, 0<m<1, 2<m$

医学部後期　この行列の固有値は $\dfrac{1}{3}, 3$,　それぞれ対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
直線 l というのは固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含んだ直線で，
この上にない点 P は，もう一つの直交する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ にそって，$\dfrac{1}{3}$ 倍される。
つまり，求める $d_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n d_0=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}\cdot 3^n}$
行列も $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ から
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 37 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$ と作ったかな。
この行列も目で見ておこう。