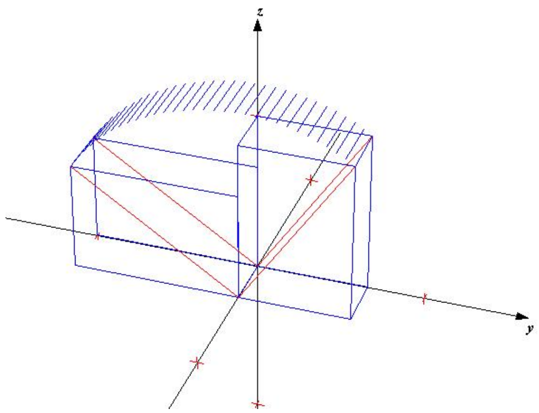
東大（前期）と東北大（後期）の回転体

両方とも軸のまわりに 90° 回転するもの。東大のものは形はわかるが，体積の値の範囲を求める方が目的。東北大は，形はわかりずらいが，体積は計算できという問題。東北大は前にもこんな問題があった。これ，なんとなく大学の資質でしょうか？

> 3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。
>
> (1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。
>
> (2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

の体積のとりうる値の範囲だ。



(1) 半径 $\sqrt{a^2+c^2}$，高さ b の円柱の四分の一と直方体の体積の和だから，

$\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)b+abc$

(2) $b=1-(a+c)$ なので $V=\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}\{1-(a+c)\}$ なる 2 変数の最大値を求めればいい。

対称式だから，$a+c=u, ac=v$ とおくと，a, c は $x^2-ux+v=0$ の解なので $D=u^2-4v \geqq 0$

$1>u>0, v>0$ のとき，$V=\left\{\frac{\pi}{4}(u^2-2v)+v\right\}(1-u)$ の値の範囲を求める。

$0<v \leqq \frac{u^2}{4}$ なので，

$V=\left\{\frac{\pi}{4}u^2-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)v\right\}(1-u)<\frac{\pi}{4}u^2(1-u)$

$\frac{4V}{\pi}=u^2(1-u)=u^2-u^3 f(u)$ を微分して，$f'(u)=2u-3u^2=-u(3u-2)$

増減表を書いて，

u	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
f'	0	$+$	0	$-$	$-$
f	0	↗	極大	↘	0

$f(u)$ の最大値は $u=\frac{2}{3}$ のときで，$\frac{4}{27}$

よって，求める体積の値のとりうる範囲は 0 より大きく $\frac{\pi}{27}$ より小さい。

> x, y 平面において，連立不等式 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \\ y \geqq 0\end{cases}$
>
> の表す領域を A とする。
>
> これを座標空間内で z 軸の方向に 1 だけ平行移動するときに A が通過してできる立体を B とする。
>
> B を x 軸のまわりに，y 軸から z 軸の方向に 90° 回転させたときに通過してできる立体を C とする。
>
> C の体積を求めよ。

東大と同じ回転だけれど，回転するものは直方体ではないので，断面積を積分することになる。

計算も難しくはないが形に興味あります。

x 軸に垂直な平面で切断した断面積は，底辺 $(x-1)^2+y^2=1$ から $\sqrt{1-(x-1)^2}$，高さ 1 の長方形だから，それが 90° 回転した面積は左の東大の時と同じように，$\frac{\pi}{4}\{2-(x-1)^2\}+\sqrt{1-(x-1)^2}$

よって，体積は $\displaystyle\int_0^1\left[\frac{\pi}{4}\{2-(x-1)^2\}+\sqrt{1-(x-1)^2}\right]dx$

$=\frac{\pi}{4}\left[2x-\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1+\frac{\pi}{4}=\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{4}\right)\pi=\frac{2}{3}\pi$

左がその様子で，右は後ろから見た立体。音楽のホールにいい感じだ。