直線の回転　’10 京都文

座標空間内で，O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)，D(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1) を頂点にもつ立方体を考える。

(1) 頂点 A から対角線 OF に下ろした垂線の長さを求めよ。

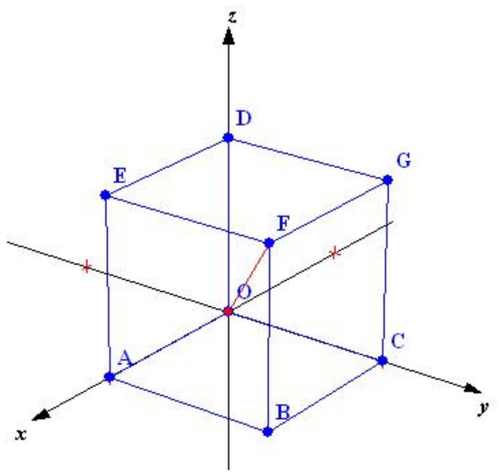
(2) この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

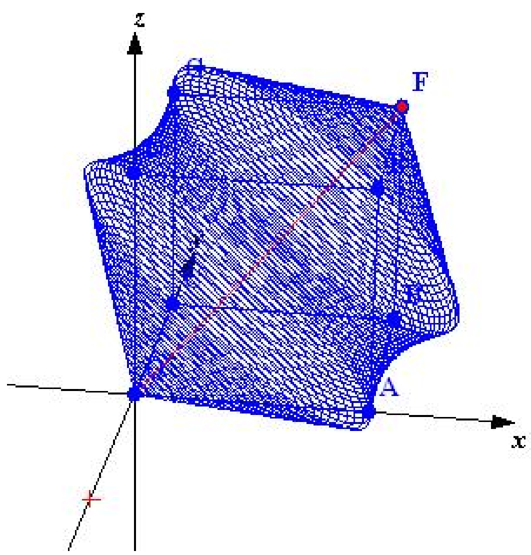
正八面体を回転させるのは東大だったな。空間での直線の回転は定番になりつつある。

(1) A から OF におろした垂線の足を H とすると， t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t(1,1,1)$ とおけて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(t-1,t,t)$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=0$ より $t-1+t+t=0$ で $t=\frac{1}{3}$ なので H$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ より，求める垂線の長さは $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) さて，問題の立方体を回してできる立体だ。左が立方体，わかりやすいように座標軸をまわして，右が問題の立方体。





O から H までは OA が OF の周りを回る円錐で，同じものが両端にある。真ん中が直線 AE が回転したもの。

OH= $\frac{\sqrt{3}}{3}$，AE 上の点を P とすると，s を実数として P$(1,0,s)$ $(0\leqq s\leqq 1)$，これと OF との距離は (1) と同様に求めて $\sqrt{\left(\frac{s-2}{3}\right)^2+\left(\frac{s+1}{3}\right)^2+\left(\frac{1-2s}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}(s^2-s+1)}$

よって，求める体積は $\begin{array}{c|cc} s & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$ $,t=\frac{\sqrt{3}}{3}(s+1)$ に注意して

$$2\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{2\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{2}{3}(s^2-s+1)dt=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\int_0^1\frac{2}{3}(s^2-s+1)\frac{\sqrt{3}}{3}ds=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\frac{5}{27}\sqrt{3}\pi$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

回転する直線はあまりにもよく出だしたので，公式を作ってしまった。

底面の半径 a 高さ $2b$ の位相が θ ずれた一葉双曲面で囲まれた部分の体積は $\frac{2}{3}\pi a^2b(2+\cos\theta)$ （証明は別のところで）

こいつを使うと，$\frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\cos\frac{\pi}{3})=\frac{5}{27}\sqrt{3}\pi$

すごいでしょ！

最後に立方体を空間の中で回転させて z 軸の周りにまわしたものとして見てみると