直線の回転　と　双曲線で囲まれた部分の面積

'10 早稲田理

xyz 空間において，2 点 P(1, 0, 1), Q(−1, 1, 0) を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる曲面を S とする。以下の問に答えよ。

(1) 曲面 S と，2 つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

(2) (1) の立体の平面 $y=0$ による切り口を，平面 $y=0$ 上において図示せよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t^2+1}dt$ の値を $t=\dfrac{e^s-e^{-s}}{2}$ と置換することによって求めよ。

これを用いて,(2) の切り口の面積を求めよ。

空間での直線の回転は定番になりつつある。

(1) 昔なら，空間の直線の方程式で $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$

これを x 軸の周りに回すのだから，x 軸に垂直な平面での断面積は $y^2+z^2=\left(\dfrac{x-1}{-2}\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{2}+1\right)^2$

つまり $y^2+z^2=\dfrac{x^2+1}{2}\cdots$① ができる立体の方程式。

求める体積は $\pi\displaystyle\int_{-1}^1 (y^2+z^2)dx=\pi\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{2}dx=\frac{4}{3}\pi$

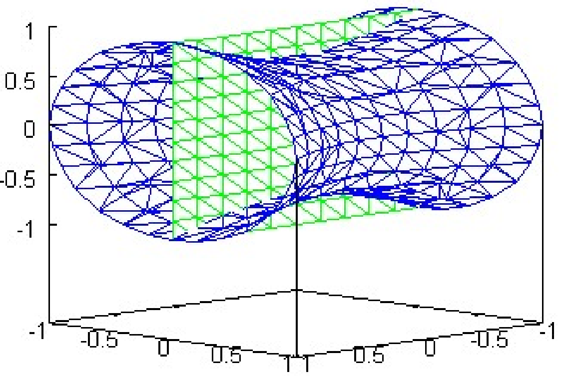
今なら，ベクトルを利用して PQ 上の点を R(x,y,z) とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}(0 \leqq t \leqq 1)$ より

$x=-2t+1, y=t, z=-t+1\cdots$②

これを x 軸の周りに回すのだから，x 軸に垂直な平面での断面積は $y^2+z^2=t^2+(-t+1)^2=2t^2-2t+1\cdots$②

求める体積は $\pi\displaystyle\int_{-1}^1 (y^2+z^2)dx=\pi\int_1^0 (2t^2-2t+1)(-2)dt=\frac{4}{3}\pi$

(2) ① で $y=0$ とすれば（② で $y=0$ としても），$x^2-\dfrac{z^2}{\frac{1}{2}}=-1$



(3) $t=\dfrac{e^s-e^{-s}}{2}$ とおくと $\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{e^s+e^{-s}}{2}, \sqrt{t^2+1}=\dfrac{e^s+e^{-s}}{2}$,

t	0	1
s	0	α

ただし α は $\dfrac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}=1$ つまり $e^\alpha-e^{-\alpha}=2, e^{2\alpha}-2e^\alpha-1=0, e^\alpha>0$ より $e^\alpha=1+\sqrt{2}$

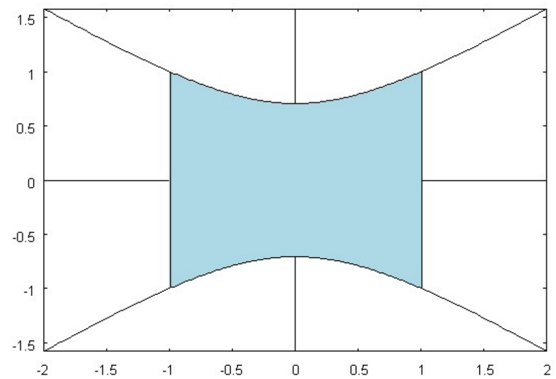
$$\int_0^1 \sqrt{t^2+1}dt=\int_0^\alpha \frac{e^s+e^{-s}}{2}\frac{e^s+e^{-s}}{2}ds=\frac{1}{4}\int_0^\alpha (e^{2s}+e^{-2s}+2)ds=\frac{1}{4}\left[\frac{e^{2s}}{2}-\frac{e^{-2s}}{2}+2s\right]_0^\alpha$$

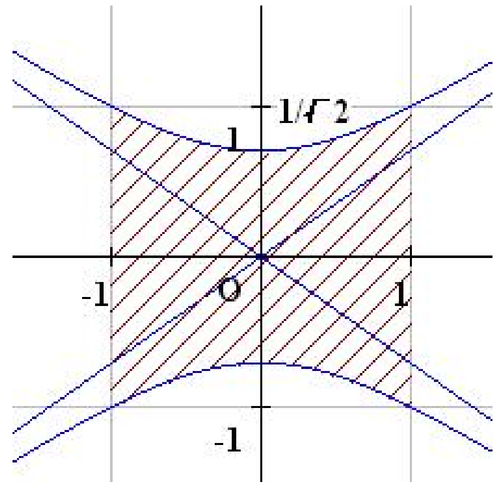
$$=\frac{1}{8}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})+\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{8}\left\{(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right\}+\frac{\log(1+\sqrt{2})}{2}=\frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{2}$$

$x^2-\dfrac{z^2}{\frac{1}{2}}=-1$ より $z=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}$ なので，求める面積は

$$2\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}dx=2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx=\sqrt{2}(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}))=2+\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})$$

左は by Maxima 右は by FunctionView 前の空間図形も by Maxima





$\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}dx$ が，高校生はヒント無しでは計算できない。これは「再読・解析概論」参照だが，実は

$$I=\int \sqrt{x^2+1}dx=x\sqrt{x^2+1}-\int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx\ (\text{部分積分})=x\sqrt{x^2+1}-\int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

よって $I=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)$

で，この $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ も高校生にはヒント無しでは計算できないやつなのだが，$x+\sqrt{x^2+1}=t$ とおいて求めさせる入試問題もある。

$\sqrt{x^2+1}=t-x$ を 2 乗して整理し,$x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ よって，$\sqrt{x^2+1}=\dfrac{t^2+1}{2t}, \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+1}{2t^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{2t}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int \frac{1}{t}dt=\log t+C=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ とおくと $x+\sqrt{x^2+1}=e^y, \sqrt{x^2+1}=e^y-x$

2 乗して整理すると $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=\sinh y$ （ハイパボリックサインという双曲線正弦なる関数）

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ は，だからその逆関数となる。なにか，ぐるぐる回っているようだが，ヒントはこういうところからきている。