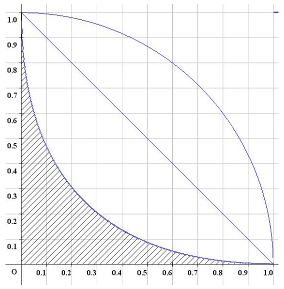
はじめてのガンマ関数とベータ関数

曲線 $x^n+y^n=1$ ($n>0$) とベータ関数

まず，形は $n<1$ ならアステロイド，$n=1$ なら正方形，$n=2$ なら円，の一部。



図の斜線の部分の面積， x 軸の周りに回転したとき
の体積が '08 年慶応理工の入試に出ましたね。
で，まず面積からいきますか。
$\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}dx \cdots$ ① を求めればよい。

$n=1$ なら $\displaystyle\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$， $n=2$ なら $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

$n=\dfrac{1}{2}$ なら $\displaystyle\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$

n が 1 より小さいと二項係数が関係しそうで，まあ計算はできそう。 n が 1 より大きいと難しそう。

ちょっと，Maxima で実験してみると，

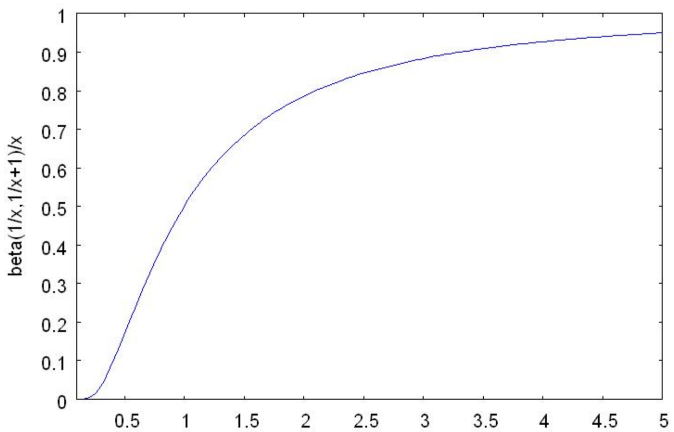
```
for n:1 thru 4 do display(integrate((1-x^(1/n))^n,x,0,1))
for n:1 thru 4 do display(integrate((1-x^n)^(1/n),x,0,1))
```

1 より小さいほうは，案の定 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{70}$，1 より大きいほうは，やっぱり $\frac{1}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\beta\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)}{3},\frac{\beta\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)}{4}$

ベータ関数が出てくる。大体が $\displaystyle\int_0^1(1-x^n)^{\frac{1}{n}}dx$ とやると， $\dfrac{beta\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}+1\right)}{n}$ とくるから，ベータ関数がその本質なのだ。**ベータ関数**とは**第一種オイラー積分**ともいわれる次の式で定義されるもの。

$beta(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

計算はあとからやるとして，これを利用して，上の斜線の部分の面積と n との関係を目で見よう。



$\dfrac{beta\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x}+1\right)}{x}$
のグラフ。0 で 1 ,1 で 0.5 ,2 で $\pi/4$
大きくなると 1 に近づいているわけだ。

①を置換積分しよう。

$x^n=t$ とおくと $nx^{n-1}\dfrac{dx}{dt}=1$ より①$=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{n}beta\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right)$ となる。

オイラーはこの積分をどんなときに何のために定義したのだろう？

それはさておき，ベータ関数は $beta(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\cdots$② なる関係式が成り立つので，

($\Gamma(x)$ は階乗を実数に広げた，ガンマ関数。)

l,m 整数のときは $beta(l,m)=\dfrac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!}$ さあ $n=1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots$ はこいつを用いて

$1\cdot beta(1,2)=\dfrac{0!1!}{2!}=\dfrac{1}{2},2\cdot beta(2,3)=\dfrac{1!2!}{4!}=\dfrac{1}{6},3\cdot beta(3,4)=\dfrac{2!3!}{6!}=\dfrac{1}{20},\cdots$

数 II の「6 分の公式」数 III の部分積分の練習公式すべてこれでいける。

$\displaystyle\int_a^b(x-a)(x-b)dx$ は $t=\dfrac{x-a}{b-a}$ と変数変換をすると，

$-(b-a)^3\displaystyle\int_0^1 t(1-t)dt=-(b-a)^3beta(2,2)=-\frac{1}{6}(b-a)^3$

例えば $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^4dx=beta(2,5)=\frac{1!4!}{6!}=\frac{1}{30}$

$\displaystyle\int_a^b(x-a)^2(x-b)dx=-(b-a)^4beta(3,2)=-(b-a)^4\frac{2!1!}{4!}=-\frac{1}{12}(b-a)^4$

置換積分のやり方は一つに限らなくて，

$x^n=\sin^2\theta$ とおくと $dx=\dfrac{2}{n}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos\theta d\theta$ より ①$=\dfrac{2}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos^{\frac{2}{n}+1}\theta d\theta$ となる。

ベータ関数の公式 $beta(x,y)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta$ の証明も同じようにできる。

すると**三角関数の積分**もこれでいけるものがある。

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\frac{1}{2}beta\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ ここで $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\cdots$③ を使えば，次が示される。

n が偶数のとき $\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

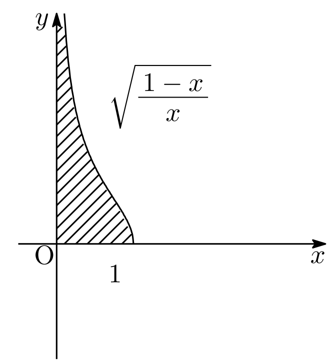
n が奇数のとき $\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1$

これは部分積分の問題として高校の教科書にもある。

というわけで，① から色々なことが楽しめる。さらに $n=2$ のときは特別に値がわかるのだが

$\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}beta(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{t}}dt$ こんな積分が求められるということだ。



$\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$ の逆関数は $\dfrac{1}{t^2+1}$ だから $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$ と同じだ。これは $x=\tan\theta$ と置いて $\Big[\arctan x\Big]_0^\infty=\dfrac{\pi}{2}$ とやれば高校生でもできる。ああ，面白かった。

ガンマ関数の ②,③ はいつか証明しよう。