直線の回転　'09 名古屋市立大

xyz 空間内の 2 点 P $(0,-1,1)$ と Q $(1,0,-1)$ を通る直線を l とし，直線 l を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面と 2 つの平面 $z=1$ および $z=-1$ で囲まれた立体を A とする。次の問いに答えよ。

(1)　立体 A を平面 $z=0$ で切った断面 B の面積 S_1 を求めよ。

(2)　立体 A の体積 V を求めよ。

(3)　立体 A を平面 $z=x$ で切った断面 C の面積 S_2 を求めよ。

昔なら，空間の直線の方程式で $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$（$-1\leqq z\leqq 1$）

これを z 軸の周りに回すのだから，$x^2+y^2=\left(\dfrac{z-1}{-2}\right)^2+\left(\dfrac{z-1}{-2}-1\right)^2$ つまり $2x^2+2y^2=z^2+1$ ができる立体の方程式。

今なら，ベクトルを利用して PQ 上の点を $\mathrm{Q}(x,y,z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}(0\leqq t\leqq 1)$ より，$x=t, y=t-1, z=-2t+1$

(1) 平面 $z=0$ で切った断面 B は円で半径の 2 乗は x^2+y^2 だから

$z=0$ のとき，$x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{1}{2}$ つまり，面積 $S_1=\pi\left((\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2\right)=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dz=\pi\int_{-1}^{1}\frac{z^2+1}{2}dz=\frac{4}{3}\pi$

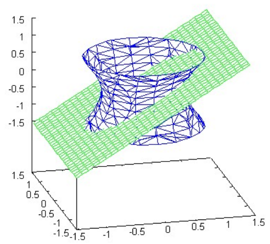
あるいは　$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dz=\pi\int_{1}^{0}\{t^2+(t-1)^2\}(-2)dt=\frac{4}{3}\pi$

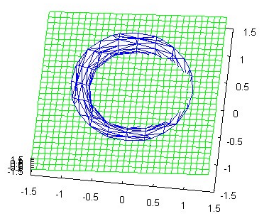
問題は (3) だ。まずは答えを出してみる。

$2x^2+2y^2=z^2+1$ と $z=x$ を連立すると $x^2+2y^2=1, z=x$ つまり楕円柱と傾き 45° の平面との共通部分となる。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の面積は πab だから，$S_2\cos 45^\circ=\pi\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ よって $S_2=\pi$

さて Maxima でこれを見ると，上の方程式は一葉双曲面でその曲面と平面との交わりだ。



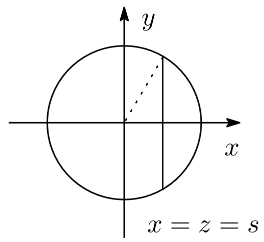


ベクトルを使って積分もちゃんとやると (3) は，$(1,0,1)$ の方向に u 軸をとる。

$z=s$ とすると，$u=\sqrt{2}s, x=\dfrac{1-s}{2}, y=\dfrac{1+s}{2}$ より円の半径は $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{1+s^2}{2}}$

平面 $z=x$ との交わりが作る弦の長さは $2\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{1+s^2}{2}}\right)^2-s^2}=2\sqrt{\dfrac{1-s^2}{2}}=\sqrt{2(1-s^2)}$

よって $S_2=\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2(1-s^2)}du=\int_{-1}^{1}\sqrt{2(1-s^2)}\sqrt{2}ds=4\int_{0}^{1}\sqrt{1-s^2}ds=4\frac{\pi}{4}=\pi$



次はファンクション・ビューでかいた図だ。じっくりと理解しよう。