回転体の体積 ’09 東大理４

a を正の実数とし，空間内の２つの円板

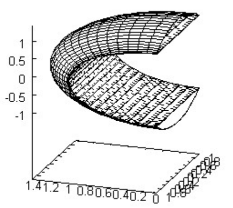
$D_1 = \left\{ (x,\, y,\, z) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 1,\, z=a \right\}, D_2 = \left\{ (x,\, y,\, z) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 1,\, z=-a \right\}$

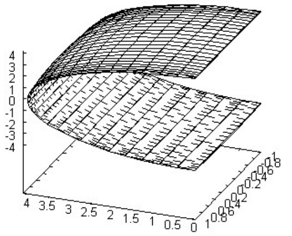
を考える。D_1 を y 軸の回りに $180°$ 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\, y,\, z) \mid x \geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

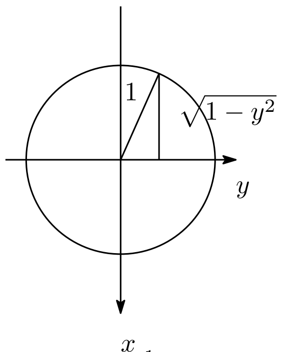
(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} V(a)$ を求めよ。

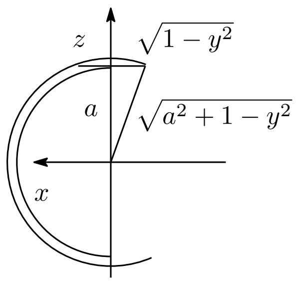
Maxima で $W(a)$ をかいてみると次のような図だ（回転してるけど）。$a=1$ と $a=4$





上から見た図と y 軸と垂直な平面で切断した断面図を考えると，ドーナツ型で





$$W(a) = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{a^2+1-y^2}^2 - a^2\right)dy = \pi\int_0^1 (1-y^2)dy = \pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

a によらないのか！となると， a が無限大に飛ぶと $V(a)$ はちょっと出っ張る分だけは 0 に飛んで (1) と同じ答えだ。そう思えば，出っ張る分が 0 に飛ぶことをいえばいい。

極限で困ったら挟み撃ちで上と下から評価することだ。ここでは 上から評価してそれが 0 に飛べばいい。

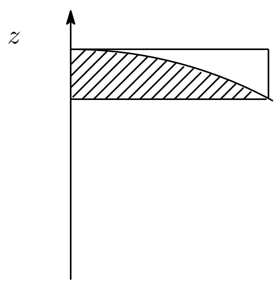
（図の斜線の部分の面積）$\leqq$（それに外接する長方形）より

（出っ張りの体積）$= 2\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{a^2+1-y^2}-a)\sqrt{1-y^2}dy$

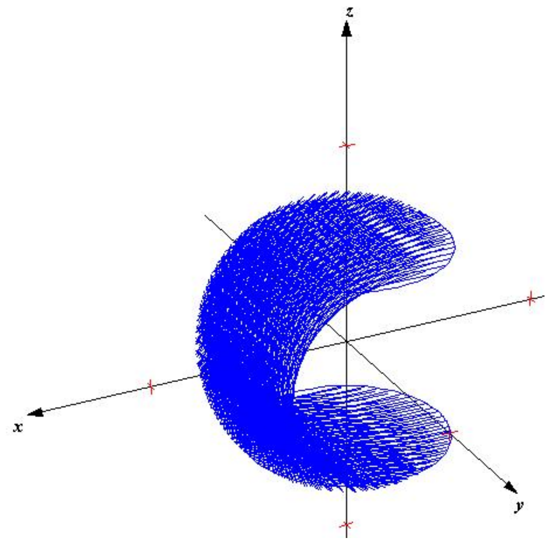
$= 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{a^2+1-y^2}+a}dy < 2\int_0^1 \frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}dy$

$(\because 0<y<1$ より $1-y^2>0)$

$= \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy \to 0\,(a\to\infty)$

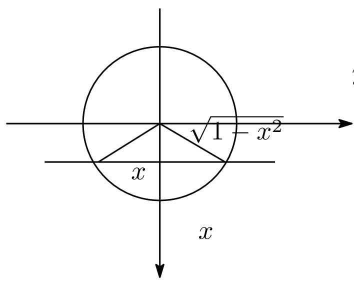


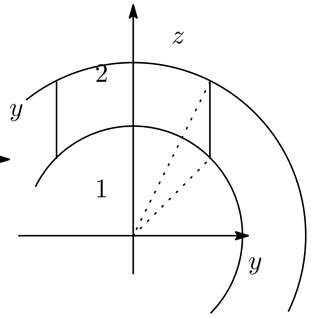
$V(a)$ をファンクションビューでかいたのが次の図。



似たようなもので，年の東北大の回転体も図が予想しづらいものだったので，思い出してかいてみると，線分 $\mathrm{A}(1,0,1)\mathrm{B}(1,0,2)$ を z 軸に回転してできる円柱を， x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

上から見た図と x 軸と垂直な平面で切断した断面図を考えると，ドーナツ型で





$$2\pi\int_0^1 \left\{(2^2+(\sqrt{1-x^2})^2)-(1^2+(\sqrt{1-x^2})^2)\right\}$$
$$= 2\pi\int_0^1 3dx = 6\pi$$

Maxima でこの立体を見てみよう。