行列の復活　鏡像

慈恵医科大学は**一次分数関数を行列で計算する方法**が，立命館では一次変換と**複素数平面の一次変換**が登場。行列は計算の武器になる。行列は計算の武器になるだけではなく，やはりそうとう面白い所。標準形までやるとスッキリするので，大学の講義をお楽しみに。

高校では平面の一次変換が行列の主な内容だから 2×2 行列中心になるわけ。その系統的な解説は「再読・代数学講義」にするとして，ここでは **09 年慶応の問 4** を考える。

xy 平面上において円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $l: 2x-y=0$ を考える。

(1) 行列 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，円 C はどのような図形に移るか。理由をつけて答えなさい。

(2) 円 C と直線 l との交点の座標は $\left(\boxed{\text{（ア）}}, \boxed{\text{（イ）}}\right), \left(\boxed{\text{（ウ）}}, \boxed{\text{（エ）}}\right)$ である。

(3) 円 C を円 C に移し，直線 l を直線 l に移す 1 次変換を表す行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ をすべて求めなさい。求める過程も示すこと。

(1) は回転拡大行列で，原点中心 45° 回転 $\sqrt{2}$ 倍である。

(3) の行列が直交行列。長さを変えない行列で，内積も変えない。

ヒントに沿って，交点を交点に移すのを必要条件として

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm1\\ \pm2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}, a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$$

を解いて十分条件を満たすことをいえばいいのだ。

しかし，答だけ出すなら，直交変換は回転と鏡像（裏返し）しかない。（というのが知識）

$0^\circ, 180^\circ$ 回転から $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=J$ はあたりまえとして

$y=2x$ が不動直線だから，この鏡像（この直線に関する対称移動）

$\tan\alpha=2$ として，$-\alpha$ 回転し，x 軸に関する対称移動して，α 回転して元に戻す。

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}$$

$$\cos2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac35, \sin2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac45$$

なので，$A=\frac15\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$y=-\frac12x$ が不動直線だから，(内積を変えない直交関係をかえない）上と同様に

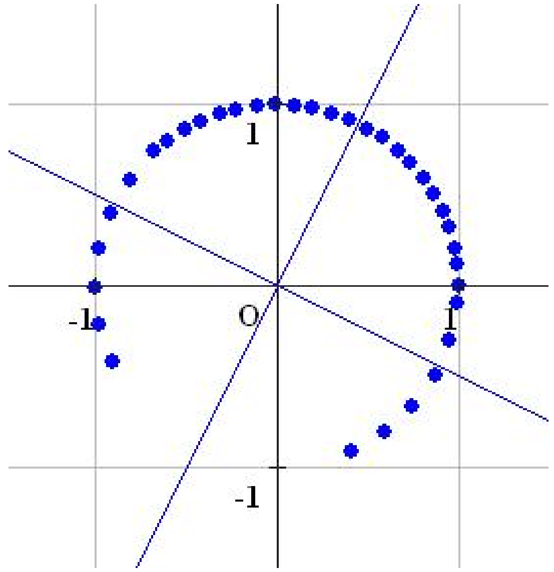
$B=-\frac15\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

あるいは，$y=-\frac12x$ も不動直線とわかれば

$(1,2)\to(1,2), (-2,1)\to(2,-1)$ が A あるいは $(-2,1)\to(2,-1)$ が I

$(1,2)\to(-1,-2), (-2,1)\to(2,-1)$ が B あるいは $(-2,1)\to(-2,1)$ が J

例えば，$A\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac15\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$



次の **09 年同志社の 2 問**も鏡像だぞ。

E を 2 次の単位行列として，2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ が $A^2=E$ をみたすとする。

ただし，a, b, c は実数であり，$b>0$ とする。

(i) a の値が取り得る範囲を求めよ。また，a の値がその範囲にあるとき，b および c を a で表せ。

(ii) $A\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}$ をみたす x を a で表せ。

$A^2=E$ になるように計算すれば，$-1<a<1, b=\sqrt{1-a^2}, c=-a$

で，$\begin{pmatrix}a & \sqrt{1-a^2}\\ \sqrt{1-a^2} & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}$ 傾き $\frac1x$ が固有値 1 の方の固有ベクトルで，固有値-1 の方がそれに垂直の $-x$ 。

これで，$\cos2\alpha=a$ より $\tan\alpha=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ 答は $-x=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ から $x=-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$

もちろん，計算はそんなこと知らなくても $ax+\sqrt{1-a^2}=-x$ を解けばいいわけだけれど，意味はこうなんだ。