

# 無理数の近似

こんな問題は、解くだけじゃあもったいない。2007年広島大

$$f(x) = \frac{8x+21}{3x+8} \text{ とおく。}$$

- (1)  $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$  であることを示せ。
- (2)  $x \geq 0$  ならば  $f(x) \geq 2$  であることを示せ。
- (3)  $x \geq 2, y \geq 2$  ならば  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{100}$  となることを示せ。
- (4)  $x \geq 2$  ならば  $|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$  となることを示し、

これを用いて  $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$  を満たす有理数  $r$  を 1 つ求めよ。

答  $r = \frac{590}{223}$  など

無理数の分数近似に関しては、連分数が有名だが（連分数参照）、ここでは分数の漸化式といったもの。

面白いからこの分数表示の作り方を（つまりこの問題を作ってやろうと）考えよう。

(1) 計算すればよい。 $\frac{ax+b}{cx+d} = x$  つまり  $cx^2 + (d-a)x - b = 0$  の解が近似する分数。だとすると、 $\sqrt{p}$  の形の無理数の近似としては  $a = d$  が便利で、そのとき  $p^2 = \frac{b}{c}$

(2) グラフをかくと明らか。

$$(3) |f(x) - f(y)| = \left| \frac{8x+21}{3x+8} - \frac{8y+21}{3y+8} \right| = \frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)} \leq \frac{|x-y|}{14 \cdot 14} \leq \frac{|x-y|}{100} \quad (x \geq 2)$$

ここも、こんなにうまくいくのは、 $ad - bc = 1$  となっているからだ。さきに  $d = a, b = cp^2$  だったから、 $a^2 - c^2p^2 = 1$

$$(3) |f(f(x)) - f(f(\sqrt{7}))| \leq \frac{|f(x) - f(\sqrt{7})|}{100} \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

$$x = 2 \text{ として、} \left| \frac{590}{223} - \sqrt{7} \right| \leq |2 - \sqrt{7}| 10^{-4} < 10^{-4} \quad (\because \sqrt{7} - 2 < 1)$$

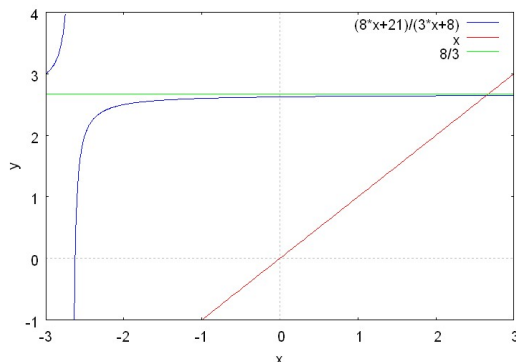
$r = \frac{590}{223}$  とすれば、 $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$  をみたく。

というわけで、問題は解けたが、問題の分数式を作ることもできそうだ。

$$\sqrt{7} \text{ を近似する分数式は以上から } \frac{ax+7c}{cx+a}, a^2 - 7c^2 = 1$$

後半  $a^2 - 7c^2 = 1$  をみたす自然数の一番小さいのが  $c = 3, a = 8$  というわけだ。

で、後の方の不定方程式は Pell の方程式  
 といって、無理数の連分数展開に関係するものだったわけ。（高木貞治「初等整数論講義」）



$$\sqrt{3} \text{ を近似する分数式は以上から } \frac{ax+3c}{cx+a}, a^2 - 3c^2 = 1$$

後半  $a^2 - 3c^2 = 1$  をみたす自然数の一番小さいのが  $c = 1, a = 2$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{a_n+2}, a_1 = 1 \text{ として、Maxima で見てみるか。}$$

```
a(n):=block(
if n=1 then return(1)
else return((2*a(n-1)+3)/(a(n-1)+2))
);
```

```
for i:1 thru 10 do
print(a(i),float(a(i)));
```

```
1 1.0
5/3 1.666666666666667
19/11 1.727272727272727
71/41 1.731707317073171
265/153 1.73202614379085
989/571 1.732049036777583
3691/2131 1.732050680431722
13775/7953 1.73205079844084
51409/29681 1.732050806913514
191861/110771 1.732050807521824
```

```
load(dynamics)$
staircase((2*x+3)/(x+2),1,5,[gnuplot_preamble, "set zeroaxis"])$
```

