対数螺旋

こんな問題は，解くだけじゃあもったいない。**2007 年東大**

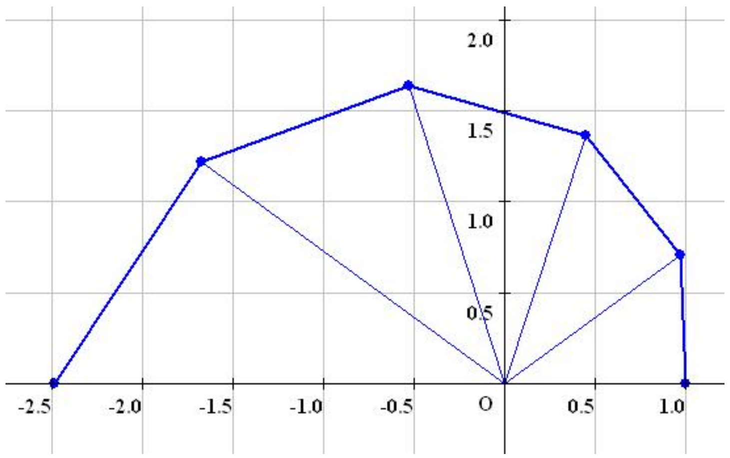
n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，$\cdots$，P_n があり，
次の 2 つの条件を満たしている。

(A) $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k=\dfrac{\pi}{n}$ $(1 \leqq k \leqq n)$，$\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k=\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ $(2 \leqq k \leqq n)$

(B) 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

$\triangle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k \backsim \triangle\ \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ $(2 \leqq k \leqq n)$ なので



$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+\left(1+\frac{1}{n}\right)a_1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2a_1+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}a_1$$

$$=a_1\left\{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right\}=a_1\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=na_1\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}$$

$\triangle\ \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ で余弦定理により

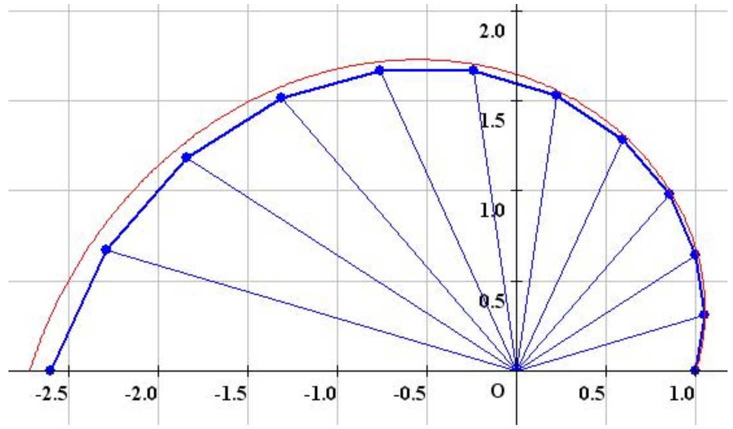
$$na_1=n\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}=\sqrt{n^2+(n+1)^2-2\cdot n\cdot(n+1)\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$=\sqrt{2n^2+2n+1-2(n^2+n)\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)}=\sqrt{1+4(n^2+n)\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$

$$=\sqrt{1+4(n^2+n)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2\pi^2}\to\sqrt{1+\pi^2}\ (n\to\infty)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\to e-1\ (n\to\infty)$$

よって答は $(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$



この極限が**対数螺旋** (logarithmic spiral)（等角螺旋ともベルヌーイ螺旋ともいう）。
極座標は $r=e^{\theta}$ （指数螺旋といいたいところだが，歴史的には対数の方が先に発見されている）$\theta=\log r$
ちなみに，等角の性質はデカルトが発見し，拡大しても不変な性質はベルヌーイが発見したという。（ベルヌーイは自分の墓にこの模様を刻みたかったが，誤ってアルキメデス螺旋が刻まれている）
等角の性質より, 動物が獲物を求めて描く軌跡もこの曲線に近いという。以上，Wiki から。

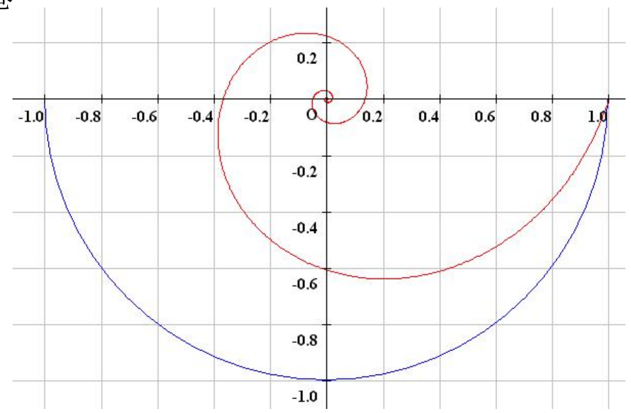
上のグラフの外側の赤い曲線が対数螺旋。まるで巻貝のようだ。生物は自己相似に成長するのでこの対数螺旋になるわけだ。

この問題では $r=e^{\frac{\theta}{\pi}}$ なので，曲線の長さも公式で計算できる。

$$\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{e^{\frac{2\theta}{\pi}}+\frac{1}{\pi^2}e^{\frac{2\theta}{\pi}}}dx=\sqrt{1+\frac{1}{\pi^2}}\int_0^{\pi}e^{\frac{\theta}{\pi}}dx=\pi\sqrt{1+\frac{1}{\pi^2}}\left[e^{\frac{\theta}{\pi}}\right]_0^{\pi}$$
$$=(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$$

ちなみに，この公式は $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ として, 長さの公式 $\displaystyle\int\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$ で計算すれば出る。

トリチェリが示したという, 中心に無限に巻いていくが長さは有限だというのは,
$r=e^{\frac{\theta}{\pi}}$ とすれば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\theta}\sqrt{1+\pi^2}\left[e^{\frac{\theta}{\pi}}\right]_{-\infty}^{\theta}$
$=\sqrt{\pi^2+1}e^{\frac{\theta}{\pi}}$
ということだろう。
$\theta=0$ のとき,
赤い曲線の長さ $\sqrt{\pi^2+1}>$ 青い半円の長さ π



$r=e^{\theta}$ とすれば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\theta}\sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_{-\infty}^{\theta}=\sqrt{2}e^{\theta}$,$\theta=0$ のとき, 曲線の長さ $\sqrt{2}$