ORI 予選 2024　推薦問題

1.　以下の値は有理数である。これを既約分数の形で表せ。
$\sqrt{\dfrac{123!-122!}{122!-121!}}$

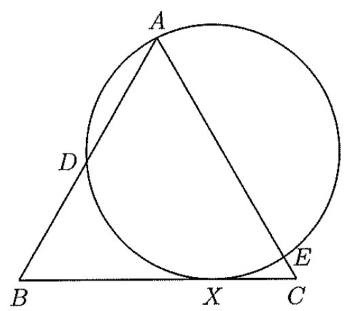
解） $\sqrt{\dfrac{123!-122!}{122!-121!}}=\sqrt{\dfrac{122!(123-1)}{121!(122-1)}}=\sqrt{\dfrac{122!\cdot 122}{121!\cdot 121}}=\sqrt{\dfrac{122\cdot 122}{121}}=\dfrac{122}{11}$

2.　どの桁に現れる数字も素数であるような正の整数を素敵な数とよぶ。
3 桁の正の整数 n であって, $n+2024$ と $n-34$ がともに素敵な数であるものはちょうど 2 つある。
このような n をすべて求めよ。

解） 309,311
末位の数字から、条件にあっているものをシラミツブシに探す、他に方法あるのかな？

3.　一辺の長さが 10 の正三角形 ABC がある。
A を通る円が辺 BC(端点を除く) と点 X で接し, 辺 AB,AC とそれぞれ A でない点 D,E で交わっている。
$BX>CX, AD+AE=13$ がともに成り立つとき, 線分 BX の長さを求めよ。

解）　$BX=x$ とすると，方べきの定理より
$x^2=10(10-AD), (10-x)^2=10(10-AE)$
足すと，条件より $2x^2-20x+100=10(20-13)$
整理して $x^2-10x+15=0$
$x>0$ より $x=5+\sqrt{5}$



4.　n を 0 以上 5^5 以下の整数とする。黒石 n 個と白石 5^5-n 個を横一列に並べ, 次の操作を 5 回繰り返す。
石の列を左から順に 5 個ずつ組にする, 各組に対して, その組に属する 5 個の石を, それらの 5 個の石のうち多い方の色の石 1 個に置きかえる。
最初の石の並べ方によらず, 最後に残る 1 個の石が必ず黒石であるような n としてありうる最小の値を求めよ。

解）「どんな並べ方をしても黒石」の否定は「白石となる並べ方がある」だから,
$5^5-3^5+1=2883$

5.　10 以上の整数 n であって, $\left[\dfrac{n}{1}\right]\left[\dfrac{n}{2}\right]\cdots\left[\dfrac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$ をみたすようなもののうち, 最小のものを求めよ。

解）とりあえず式を簡単に
$\left[\dfrac{n}{1}\right]\left[\dfrac{n}{2}\right]\cdots\left[\dfrac{n}{10}\right]=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-9)}{9\cdot 8\cdots 1}$
$1\left[\dfrac{n}{1}\right]2\left[\dfrac{n}{2}\right]\cdots 10\left[\dfrac{n}{10}\right]=n(n-1)\cdots(n-9)$
$2\left[\dfrac{n}{2}\right]\cdots 10\left[\dfrac{n}{10}\right]=(n-1)\cdots(n-9)$
$2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ は，n が奇数だと $2\left[\dfrac{n-1}{2}\right]=n-1$，で，閃いて
n は 2 で割って 1 余る数，3 で割って 2 余る数，$\cdots$，10 で割って 9 余る数ならば OK!
このうち，8 で割って 7 余る数なら，4 で割って 3 余る数でも 2 で割って 1 余る数でもある。
このうち，9 で割って 8 余る数なら，3 で割って 2 余る数でもある。
このうち，2 で割って 1 余る数，5 で割って 4 余る数なら，10 で割って 9 余る数である。
このうち，2 で割って 1 余る数，3 で割って 2 余る数なら，6 で割って 5 余る数である。
つまり，n は i で割って $i-1$ 余る数（$i=9,8,7,5$）　mod $9\cdot 8\cdot 7\cdot 5=2520$ で $n\equiv -1$
よって, 求める数は 2519