100年前の東大入試

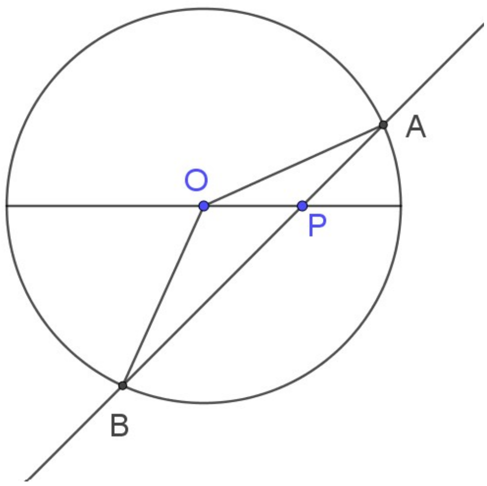
いい本です「100年前の東大入試問題」。なんたって暇つぶしに一番。この冬，はまりました。
皆さん読みましょう，と宣伝しておいて，著者と違ったやり方を紹介しよう。

08
a が 0.0007 より小さい正の数のとき，
$1+\dfrac{a}{2}$ と $\sqrt{1+a}$ との差は $\dfrac{1}{10^7}$ より小なることを証明せよ。

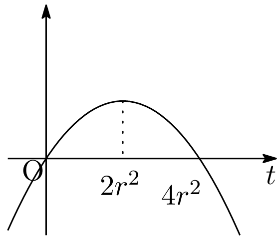
$1+\dfrac{a}{2} \fallingdotseq \sqrt{1+a}$ では足りない。で，マクローリン展開の次の項まで計算する。
$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ とおいて，$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x)=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ なので，
$\sqrt{1+a}=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}a+\dfrac{f''(0)}{2!}a^2+\cdots=1+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{8}a^2+\cdots$
$\sqrt{1+a}-1-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{8}a^2>0$ をいう。
左辺を $g(a)$ とおいて，$g'(a)=\dfrac{1}{2}(1+a)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}a, g(0)=0$
$g''(a)=-\dfrac{1}{4}(1+a)^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{4}>0, g'(0)=0$ よって，$g'(a)>0, g(a)>0$
$a<7\cdot10^{-4}$ のとき，$1+\dfrac{1}{2}a-\sqrt{1+a}<\dfrac{1}{8}a^2<\dfrac{49}{8}\cdot10^{-8}<\dfrac{80}{8}\cdot10^{-8}=10^{-7}$

12 中心 O なる定円において定点 P を通る弦 AB を引くとき
三角形 AOB の面積の極大値を求めよ。

半径を r，点 P（中心からの距離が p）と定める。
P が円外，円周上にあるときは本と同様。
$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}r^2\sin\angle AOB \leqq \dfrac{r^2}{2}$
P が円内にあるときは，方べきの定理を使う。



$AB=AP+PB, AP\cdot PB=(r-p)(r+p)$ なので，
$AB=x$ とすると，$2\sqrt{r^2-p^2}\leqq x\leqq 2r$（相加相乗平均）
$\triangle OAB=\dfrac{AB}{2}\sqrt{r^2-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$
$=\dfrac{1}{4}x\sqrt{4r^2-x^2}$
$x^2=t$ とおくと，
$t(4r^2-t)$ の
$4(r^2-p^2)\leqq t\leqq 4r^2$ における極値を求めればいい。

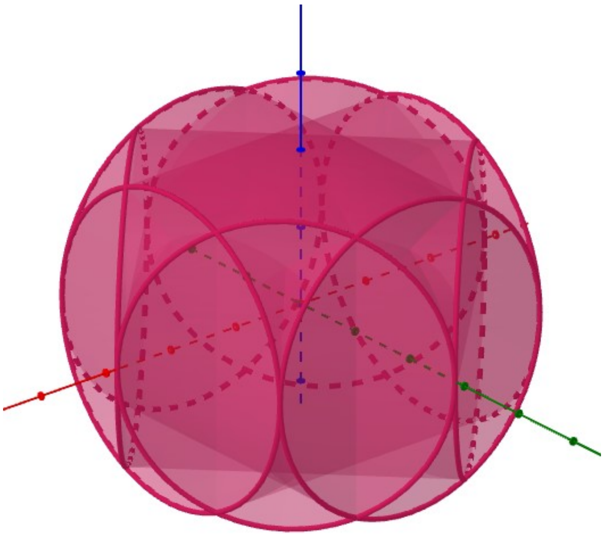


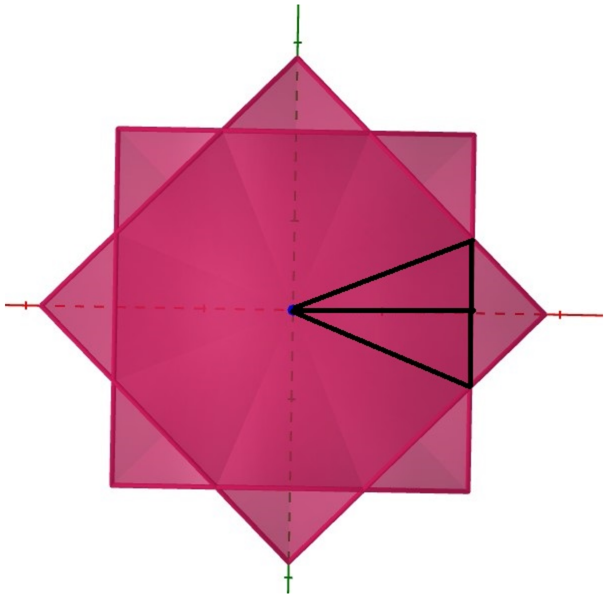
(i)$4(r^2-p^2)<2r^2$ つまり $p>\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ のとき
$t=2r^2$ のとき極大 $2r^2$ このとき，$\triangle OAB=\dfrac{r^2}{2}$
(ii)$4(r^2-p^2)\geqq 2r^2$ つまり $p\leqq\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ のとき
$t=4(r^2-p^2)$ のとき極大 $4(r^2-p^2)4r^2$
このとき，$\triangle OAB=p\sqrt{r^2-p^2}$

056

　1 辺の長さ a なる正 $2n$ 辺形で,
互いに平行な 2 辺の中心を結ぶ直線を軸とし a を直径とする n 個の円柱に共通な部分の体積を求めよ。

交わる円柱の問題。なんと n 個も。





各軸を含む平面上では正 $2n$ 角形。その面積からシンプソンの公式（別紙で解説あり）を使おう。

$2n\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}\left(2\dfrac{a}{2}\tan\dfrac{2\pi}{2\cdot 2n}\right)=\dfrac{n}{2}a^2\tan\dfrac{\pi}{2n}$

$\dfrac{a}{6}(0+4\cdot\dfrac{n}{2}a^2\tan\dfrac{\pi}{2n}+0)=\dfrac{a^3}{3}n\tan\dfrac{\pi}{2n}$

凄いですよね。シンプソンの公式。

さらに, n を無限大に飛ばしてみよう。

$\dfrac{a^3}{3}n\tan\dfrac{\pi}{2n}=\dfrac{a^3}{3}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2n}}\to\dfrac{\pi}{6}a^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^3$

で, もっともな結論。

063 $\dfrac{x^2}{1+k}+\dfrac{y^2}{1-k}=1$ は k に種々の値を与えるときいかなる曲線を表すか,
同一直角座標軸を用いてこれを書け。

$k \fallingdotseq \pm 1$ として, $-1<k<1$ のとき楕円（$k=0$ のとき円）, $k<-1, 1<k$ のとき双曲線。

これ通過領域の問題とすると面白いです。

$(1-k)x^2+(1+k)y^2=(1-k)(1+k), k \fallingdotseq \pm 1$

$\iff k^2-(x^2-y^2)k+x^2+y^2-1=0, k \fallingdotseq \pm 1$

k が存在するためには, 判別式を D とすると

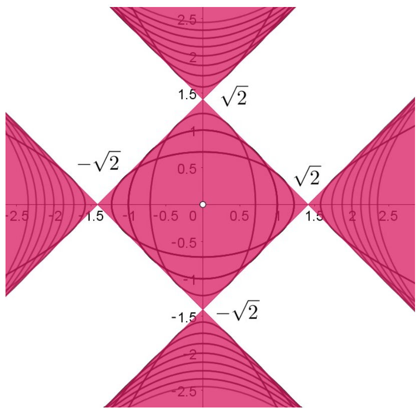
$D=(x^2-y^2)^2-4(x^2+y^2-1)\geqq 0$

$x^4-2(y^2+2)^2+(y^2-2)^2\geqq 0$

$\{x^2-(y-\sqrt{2})^2\}\{x^2-(y+\sqrt{2})^2\}\geqq 0$

$(x+y-\sqrt{2})(x-y+\sqrt{2})(x-y-\sqrt{2})(x+y+\sqrt{2})\geqq 0$

原点を除く。



075

直交軸に関して $\dfrac{x^2}{k^2+1}+\dfrac{y^2}{k^2}=1$ という方程式で表される曲線群がある。
その各々に x と 45° の角をなす接線を引くとき，その接点の軌跡を求めよ。

$k \neq 0$

接点の座標を (x_1, y_1) とすると，$\dfrac{x_1^2}{k^2+1}+\dfrac{y_1^2}{k^2}=1$

接線の方程式は，$\dfrac{x_1}{k^2+1}x+\dfrac{y_1}{k^2}y=1$ この法線ベクトルは $\left(\dfrac{x_1}{k^2+1}, \dfrac{y_1}{k^2}\right)$

条件より，これが $(1, \pm 1)$ つまり，$\dfrac{x_1}{k^2+1}=\pm\dfrac{y_1}{k^2}$

以下 (x_1, y_1) を新たに (x, y) として複号同順で計算する。

$k^2x=\pm(k^2+1)y$ つまり $(x\mp y)k^2=\pm y$

$x\mp y=0$ のとき，$y=0$ つまり，$x=y=0$ となるが，原点は楕円上の点ではない。

$k^2=\dfrac{\pm y}{x\mp y}$

これを満たす k が存在するには，$\pm y(x\mp y)>0$

k^2 を消去すれば

$$\frac{x^2}{\dfrac{\pm y}{x\mp y}+1}+\frac{y^2}{\dfrac{\pm y}{x\mp y}}=1$$

$$\frac{x^2(x\mp y)}{x}+\frac{y^2(x\mp y)}{\pm y}=1$$

$x(x\mp y)\pm y(x\mp y)=1$

双曲線 $x^2-y^2=1$ $(\pm 1, 0)$ を除く